

**RAPORT DE CERCETARE**  
**Determinarea câmpului magnetic și a densității de flux**  
**în modelarea numerică a lentilelor magnetice**

**M. Rizea<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> National Institute of Physics and Nuclear Engineering,  
"Horia Hulubei",  
PO Box MG-6, Bucharest, Romania

# 1 Introducere

Proiectarea unui sistem opto-electronic impune ca prim pas calcularea câmpului magnetic. Ecuațiile de bază sunt cele ale lui Maxwell pentru câmpuri staționare:

$$\operatorname{rot} H = J_w \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (1.2)$$

unde  $H$  este intensitatea câmpului magnetic,  $B$  este densitatea de flux, iar  $J_w$  este densitatea curentului care generează câmpul. În plus,  $B$  și  $H$  sunt legate prin relația

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H \quad (1.3)$$

unde  $\mu$  este permeabilitatea magnetică,  $\mu_r$  este permeabilitatea relativă, iar  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ .

Pentru a satisface Ec.(1.2) se introduce un potențial vector  $A$  astfel încât

$$B = \operatorname{rot} A. \quad (1.4)$$

Ecuația (1.1) devine:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A \right) = J_w \quad (1.5)$$

Pentru rezolvarea ecuației (1.5) principalele metode se bazează fie pe diferențe finite, fie pe elemente finite. Am preferat metoda elementului finit, care are o mai mare flexibilitate în tratarea configurațiilor complexe, cu piese polare și surse de curent de orice formă. Principiile de bază ale acestei metode se vor prezenta în secțiunea următoare.

## 2 Metoda elementelor finite

### 2.1 Descriere generală

Rezolvarea unei probleme prin metoda elementului finit (vezi de exemplu [1], [2]) constă în general din 3 etape:

a) Ecuația cu derivate parțiale de rezolvat se înlocuiește printr-o funcțională corespunzătoare, a cărei minimizare este echivalentă cu rezolvarea ecuației inițiale.

b) Domeniul de definiție se împarte într-o rețea de subdomenii triunghiulare, denumite elemente finite.

c) Funcția necunoscută se aproximează pe fiecare element finit printr-un polinom de interpolare, având ca puncte de reper valorile nodale ale funcției și ale derivatelor ei până la un anumit ordin. În acest fel contribuția fiecărui element la valoarea funcționalei poate fi exprimată în funcție de valorile nodale ale necunoscutei.

Condiția ca funcționala să aibă un minim conduce la un sistem de ecuații algebrice, a cărui rezolvare duce la găsirea unei aproximații a soluției în fiecare punct al rețelei.

## 2.2 Metode variaționale în rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale

Pentru exemplificare, vom prezenta cazul unei funcționale reprezentate de o integrală bidimensională.

Fie integrala:

$$I = \int \int_D F(x, y, w, w_x, w_y) dx dy \quad (2.1)$$

în care  $D$  este un domeniu mărginit de o curbă  $C$  netedă pe porțiuni din planul  $xOy$ ,  $F$  este o funcție cu derivatele până la ordinul 2 continue în raport cu cele 5 argumente, iar  $w(x, y)$  este dată pe  $C$ . Pentru a determina extremul funcționalei, introducem o familie de funcții de test cu un parametru:

$$w(x, y) = u(x, y) + \epsilon \eta(x, y) \quad (2.2)$$

în care  $u(x, y)$  este funcția care realizează extremul funcționalei (2.1), iar  $\eta(x, y)$  are derivate continue până la ordinul doi și este nulă pe conturul  $C$ . Integrala devine atunci o funcție de  $\epsilon$ :

$$I(\epsilon) = \int \int_D F(x, y, w, w_x, w_y) dx dy. \quad (2.3)$$

Condiția de extrem se exprimă astfel:

$$I'(0) = 0. \quad (2.4)$$

Avem:

$$I'(\epsilon) = \int \int_D \left( \frac{\partial F}{\partial w} \eta + \frac{\partial F}{\partial w_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial w_y} \eta_y \right) dx dy \quad (2.5)$$

și

$$I'(0) = \int \int_D \left( \frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y \right) dx dy. \quad (2.6)$$

Pentru a elimina termenii în  $\eta_x$  și  $\eta_y$  integrăm prin părți al doilea termen în raport cu  $x$  și al treilea în raport cu  $y$ . Obținem:

$$\int \int_D \eta \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy + \int_C \eta \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y} \frac{dx}{ds} \right) ds = 0 \quad (2.7)$$

în care  $dx = \frac{dx}{ds} ds$ ,  $dy = \frac{dy}{ds} ds$ , iar  $ds$  este elementul de arc. Dar  $\eta = 0$  pe  $C$ , astfel încât a doua integrală este nulă și atunci avem:

$$\int \int_D \eta \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy = 0. \quad (2.8)$$

Conform lemei fundamentale a calculului variațional (vezi [3]), rezultă:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0. \quad (2.9)$$

Aceasta este ecuația Euler, a cărei rezolvare este echivalentă cu găsirea extremului funcționalei (2.1). În acest fel, prin aplicarea metodelor variaționale unor funcționale de tip special se obțin ecuații cu derivate parțiale. În particular, ecuația Poisson apare ca ecuația Euler a următoarei funcționale:

$$I = \int \int_D [u_x^2 + u_y^2 + 2f(x, y)u] dx dy. \quad (2.10)$$

Se poate arăta că soluția ecuației  $u_{xx} + u_{yy} = f$  realizează un minim absolut al funcționalei (2.10) în raport cu toate funcțiile având derivatele parțiale de ordinul al doilea continue care satisfac condițiile la limită  $u = g(s)$  pe  $C$ .

### 3 Determinarea distribuției de câmp

Conform calculului variațional, soluția ecuației (1.5) se obține prin minimizarea funcționalei:

$$F = \int \int \int_{Volumul\ total} \left( \frac{1}{2\mu} rot A rot A - J_w A \right) dv \quad (3.1)$$

supusă la anumite condiții la limită.

Ne vom ocupa de lentile cu simetrie de rotație, în care caz funcționala (3.1) devine:

$$F = \int \int_{Aria\ totala} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \right)^2 \right] - J_\theta A_\theta \right\} 2\pi r dz dr \quad (3.2)$$

unde  $A_\theta$  și  $J_\theta$  sunt componentele pe  $\theta$  ale lui  $A$  și  $J_w$  respectiv (vezi [4]).

Condițiile la limită pentru  $A_\theta$  sunt:  $A_\theta = 0$  pe axă și pe frontierele exterioare.

O configurație tipică este prezentată în figura 1. Domeniul se împarte în patrulatere, care la rândul lor se subdivid în elemente finite triunghiulare. Subdomeniile trebuie să fie omogene, adică să conțină un singur tip de material. Funcționala totală (3.2) este suma funcționalelor locale  $\Delta F$  pe fiecare element:

$$\Delta F = \int \int_{Element} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \right)^2 \right] - J_\theta A_\theta \right\} 2\pi r dz dr. \quad (3.3)$$

Pentru a obține o aproximație a funcționalei locale, presupunem că  $A_\theta$  variază liniar pe fiecare element, adică  $A_\theta(z, r)$  se interpolează printr-o funcție de forma

$$\bar{A}(z, r) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 r. \quad (3.4)$$

Din condițiile:  $\bar{A}(z_i, r_i) = A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , unde  $z_i$  și  $r_i$  sunt coordonatele vârfului  $i$ , iar  $A_i$  este valoarea lui  $A_\theta$  în vârful  $i$ , obținem coeficienții  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Astfel:

$$\alpha_1 = (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) / (2a), \quad (3.5)$$

$$\alpha_2 = (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3) / (2a), \quad (3.6)$$

$$\alpha_3 = (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3) / (2a), \quad (3.7)$$

unde

$$a_1 = z_2 r_3 - z_3 r_2, \quad a_2 = z_3 r_1 - z_1 r_3, \quad a_3 = z_1 r_2 - z_2 r_1,$$

$$b_1 = r_2 - r_3, \quad b_2 = r_3 - r_1, \quad b_3 = r_1 - r_2,$$

$$c_1 = z_3 - z_2, \quad c_2 = z_1 - z_3, \quad c_3 = z_2 - z_1,$$

iar  $a$  este aria elementului, dată de relația

$$a = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & r_1 \\ 1 & z_2 & r_2 \\ 1 & z_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Substituind  $A_\theta(z, r)$  cu  $\bar{A}(z, r)$  în (3.3), obținem aproximarea lui  $\Delta F$  de unde putem deduce derivatele  $\frac{\partial \Delta F}{\partial A_j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Astfel, avem:

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial A_j} = \sum_{i=1}^3 F_{ji} A_i - G_j \quad (3.8)$$

unde

$$F_{ji} = F_{ij} = \frac{\pi r_0}{2a\mu} (b_i b_j + d_i d_j) \quad (3.9)$$

$$G_{ij} = J_\theta \pi r_0 (a_j + z_0 b_j + r_0 c_j), \quad (3.10)$$

$r_0, z_0$  fiind coordonatele centrului de greutate al triunghiului, iar  $d_i = 2c_i + \frac{1}{r_0} a_i + \frac{z_0}{r_0} b_i$ .

Condiția de minimizare a funcționalei  $F$  (3.2) este:

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = 0 \quad (3.11)$$

pentru fiecare punct  $k$  al rețelei bidimensionale. La valoarea acestei derivate contribuie numai elementele care conțin acel punct, adică

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = \sum_i \left( \frac{\partial \Delta F}{\partial A_k} \right) |_{E_i} = 0 \quad (3.12)$$

unde  $E_i$  sunt elementele care conțin punctul  $k$ .

Din relația (3.12), ținând cont de egalitățile (3.8), se obține un sistem de ecuații liniare (cu matrice bandă simetrică) care are ca soluție valorile nodale ale lui  $A_\theta$ . Desigur, în sistem trebuie introduse și condițiile la limită. Pentru rezolvarea sa am utilizat eliminarea gaussiană.

## 4 Determinarea densității de flux

Din valorile  $A_\theta$  se pot obține componentele densității de flux, conform relației (1.4):

$$B_z = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}, \quad B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}. \quad (4.1)$$

De notat că pentru a calcula valorile axiale ale lui  $B_z$  (la  $r = 0$ ), trebuie aplicată regula lui Hospital, prin care deducem:

$$\lim_{r \rightarrow 0} B_z = 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \Big|_{r=0}. \quad (4.2)$$

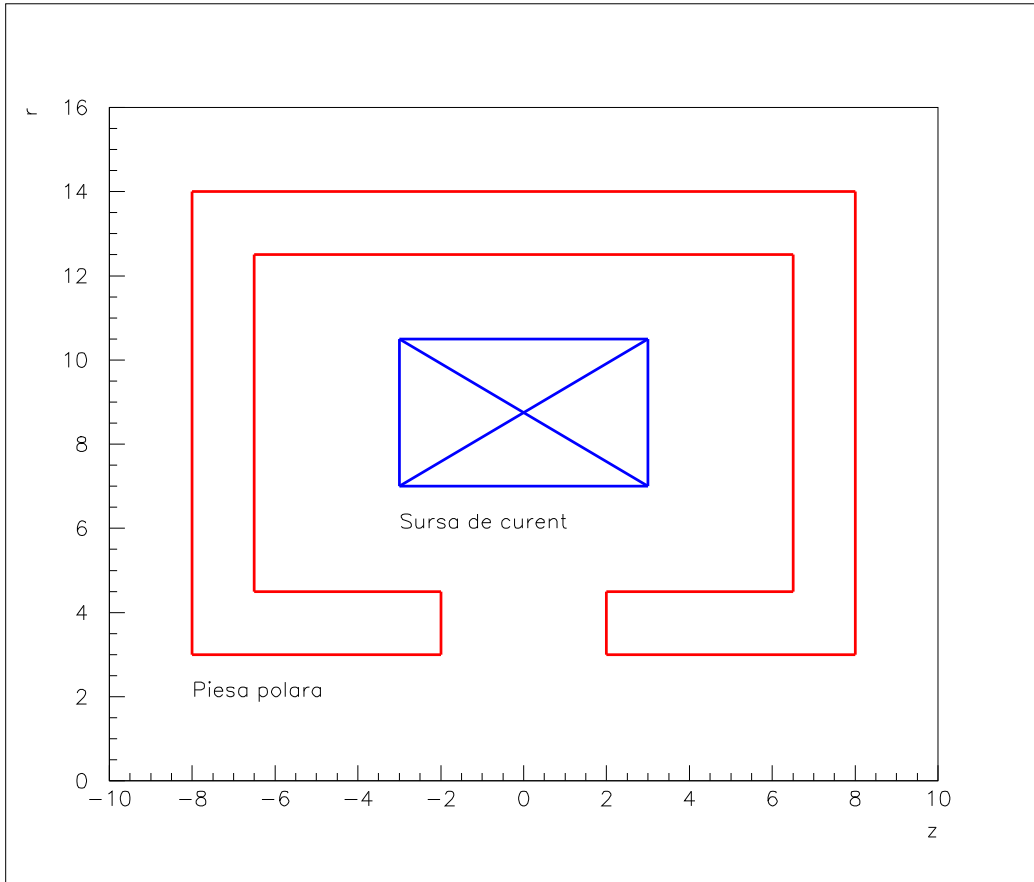


Figura 1: Secțiune într-o lentilă magnetică tipică

O problemă care apare la evaluarea densității de flux într-un punct oarecare  $(z, r)$  din domeniul problemei este că valorile lui  $A$  sunt cunoscute numai în nodurile rețelei rezultate prin împărțirea în elemente finite. Trebuie folosită o aproximare a valorii lui  $A$  și a derivatelor sale în punctul  $(z, r)$  bazată pe valorile numerice existente (obținute prin rezolvarea sistemului menționat anterior). Am recurs la funcții B-spline bidimensionale, care prezintă calități remarcabile de acuratețe și netezime. În secțiunea următoare vom da o descriere succintă a acestui tip de aproximare.

## 5 Aproximarea cu funcții spline

### 5.1 Definiții și proprietăți

Formulăm următoarea problemă: dându-se o funcție  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  și valorile ei în punctele  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  se caută o funcție  $g$  cu proprietatea  $g(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, n$ , astfel încât pentru orice  $x \in (a, b), x \neq x_i$  valorile lui  $g(x)$  și  $f(x)$  să fie cât mai apropiate. Se preferă de regulă ca funcția  $g$  să fie polinomială, căci evaluarea ei este atunci rapidă și precisă. Se demonstrează existența și unicitatea unui polinom  $P$  de grad  $\leq n - 1$  care să îndeplinească condițiile cerute, numit polinom de interpolare.

În practică, însă, diferența dintre valorile  $f(x)$  și  $P(x)$  în afara nodurilor poate fi foarte mare. Ideea de a alege mai multe noduri și de a construi un polinom de interpolare de grad mai înalt nu conduce la rezultate satisfăcătoare. Aceasta se vede din următorul exemplu dat de Runge: dacă

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in [-5, 5], \quad (5.1)$$

$$x_i = -5 + \frac{10(i-1)}{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

iar  $P_f$  este polinomul de interpolare (de grad  $n - 1$ ) al acestei funcții pe nodurile date, atunci are loc relația:

$$\max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - P_f(x)| \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

dacă  $n \rightarrow \infty$ .

Se constată așadar că polinomul de interpolare nu este indicat pentru aproximarea unei funcții date. Pentru aceasta s-a căutat un alt tip de funcție.



Funcția care are proprietatea de a converge către funcția continuă pe care o interpolează (dacă numărul nodurilor crește indefinit) este **funcția spline**. Ea este formată din polinoame pe subintervale adiacente, care se racordează în noduri împreună cu un anumit număr de derivate ale sale. Termenul a fost folosit pentru prima dată de Isaac Jacob Schoenberg (matematician de origine română) în 1946 ([5]) și provine din proiectare (de exemplu a avioanelor, navelor sau automobilelor). **Spline** este un instrument folosit pentru trasarea unor curbe netede.

Un exemplu reprezentativ este funcția spline cubică care se definește prin următoarele condiții:

1.  $s(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
2.  $s$  este un polinom de gradul trei pe fiecare subinterval  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$
3.  $s$  este de clasă  $C^2[a, b]$  (este continuă până la derivatele de ordinul doi).

Holladay ([6]) a demonstrat că dacă în plus  $s''(x_1) = s''(x_n) = 0$  (se spune atunci că avem o funcție spline naturală),  $s$  are proprietatea remarcabilă de a minimiza integrala  $\int_a^b [y''(x)]^2 dx$ , dintre toate funcțiile  $y : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  care interpolează funcția data  $f$  pe nodurile  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ea este deci soluția unei probleme variaționale de minim (în cazul din mecanică al unei bare fixate la capete, integrala respectivă reprezintă tensiunea barei sau energia potențială).

Desigur, obținerea unei funcții spline de aproximare se poate pune și dacă în locul valorilor unei funcții  $f$  se dă un set de valori  $y_i$  corespunzând absciselor  $x_i$ . Valorile  $y_i$  pot proveni din alte calcule sau pot fi date experimentale.

Pe fiecare interval  $[x_i, x_{i+1}]$  funcția spline cubică se definește astfel:

$$s(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \left( y_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \right) + \frac{x - x_i}{h_i} \left( y_{i+1} - M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) \quad (5.4)$$

unde  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Coeficienții  $M_i$  se obțin dintr-un sistem liniar, ce rezultă prin impunerea condițiilor de continuitate și a condițiilor la limită (vezi de exemplu [7], [8]).

Totuși, acest tip de funcție prezintă unele dezavantaje: introduce oscilații artificiale între noduri și fiecare punct de control (dat de perechea  $x_i, y_i$ ) exercită o influență globală asupra curbei reprezentate (modificarea poziției sale are efect asupra întregii curbe). S-a constatat că forme mai adecvate se obțin renunțând la condiția ca funcția să ia exact valorile  $y_i$  în nodurile  $x_i$ , cerând numai ca ea să se abată, într-un anumit sens, cât mai puțin de la acestea. În acest fel, punctele de control exercită numai o influență locală, făcând posibilă o ajustare convenabilă a curbei de aproximare. Funcțiile care se obțin astfel nu mai sunt de interpolare, ci de aproximare și se numesc funcții **B-spline**. Funcțiile B-spline sunt formate din combinații liniare ale unor funcții numite **funcții de bază B-spline**.

## 5.2 Funcții B-spline

Funcțiile de bază B-spline au fost introduse de I.J. Schoenberg în 1946 ("B" provine de la "bază"). Ele sunt definite în funcție de un set de puncte nodale ("knots") și nu în funcție de punctele de interpolare. Punctele nodale se construiesc pe baza punctelor de interpolare, astfel încât să se asigure o abatere minimă față de valorile de interpolare (vezi [9], p.167).

Să considerăm o secvență de  $m+1$  puncte nodale aranjate nedescrescător:  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$ . Unele noduri pot fi multiple (adică mai mulți  $u_i$  pot fi egali). Dacă nodurile sunt egal spațiate setul se numește "uniform"; altfel el este "neuniform". Punctele nodale formează o diviziune a domeniului  $[u_0, u_m]$ .

Un alt parametru necesar pentru definirea funcțiilor de bază B-spline este gradul lor  $p$ . Funcția de bază cu indicele  $i$  și gradul  $p$ , notată  $N_{i,p}(u)$  se definește recursiv astfel:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{daca } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (5.6)$$

Acesta se numește **formula de recurență Cox - de Boor** și asigură o cale practică și stabilă de evaluare a funcțiilor de bază B-spline.

### Proprietăți

1.  $N_{i,p}(u)$  este un polinom de gradul  $p$  în  $u$ .
2. Pentru orice  $i, p, u$ ,  $N_{i,p}(u)$  este ne-negativă.
3.  $N_{i,p}(u)$  este diferită de zero numai pe intervalul  $[u_i, u_{i+p+1})$  - suport local.
4. Pe orice interval  $[u_i, u_{i+1})$  cel mult  $p + 1$  funcții de bază sunt nenule, și anume  $N_{i-p,p}(u), N_{i-p+1,p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$ .
5. Suma tuturor funcțiilor de bază nenule de pe intervalul  $[u_i, u_{i+1})$  este 1 - partiția unității.
6. Dacă numărul de puncte nodale este  $m + 1$ , gradul funcțiilor de bază este  $p$ , iar numărul de funcții de bază este  $n + 1$ , atunci  $m = n + p + 1$ .
7. Funcția de bază  $N_{i,p}(u)$  este o curbă compusă din polinoame de gradul  $p$  cu puncte de racordare în nodurile din intervalul  $[u_i, u_{i+p+1})$
8. La un nod de multiplicitate  $k$ , funcția de bază  $N_{i,p}(u)$  este continuă de clasă  $C^{p-k}$ .

Alte proprietăți și dezvoltări ale funcțiilor B-spline pot fi găsite în lucrările [9], [10], [11], [12]. Aceste funcții sunt utilizate intens în foarte multe domenii (vezi de exemplu [13], [14], [15]).

### Funcții bi-dimensionale

Pentru problema noastră - determinarea densității de flux într-o geometrie bi-dimensională - avem nevoie de o funcție B-spline de două variabile. Ea se definește presupunând date următoarele informații:

1. un set de puncte de control  $P_{i,j}$ , cu  $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq n$ ;
2. un set de  $h + 1$  noduri în direcția  $u$ :  $\{u_0, u_1, \dots, u_h\}$ ;
3. un set de  $k + 1$  noduri în direcția  $v$ :  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ ;
4. gradul  $p$  în direcția  $u$ ;
5. gradul  $q$  în direcția  $v$ .

Atunci funcția B-spline bi-dimensională are forma:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \quad (5.7)$$

unde  $N_{i,p}(u)$  și  $N_{j,q}(v)$  sunt funcții de bază B-spline de gradele  $p$  și  $q$  respectiv.

Desigur, pentru fiecare direcție trebuie să aibă loc identitățile fundamentale:  $h = m + p + 1$  și  $k = n + q + 1$ .

Pe baza formulei (5.7) se pot calcula și derivatele parțiale ale lui  $S(u, v)$ .

### 5.3 Evaluarea numerică a componentelor densității de flux

Presupunem că s-au calculat valorile  $A_{i,j}$  ale câmpului pe o rețea cu nodurile  $(z_i, r_j)$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$  și se cere valoarea densității de flux în setul de puncte  $(Z_1, R_1), \dots, (Z_K, R_K)$  din domeniul problemei care pot fi diferite de punctele rețelei. Se fac următorii pași:

1. se obțin seturile de puncte nodale pe fiecare direcție folosind valorile  $z_i$ , respectiv  $r_j$ ;
2. se obțin coeficienții funcțiilor B-spline;
3. se evaluează  $S(z, r)$  și derivatele sale parțiale în raport cu  $z$  și  $r$  în fiecare punct  $(Z_k, R_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;
4. se obțin componentele densității de flux pe baza ecuațiilor (4.1, 4.2).

În calcule am folosit rutine de pachetul [16]. Funcțiile de bază B-spline au fost de gradul trei (cubice).

## Bibliografie

- [1] G. Dhatt, G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 2me édition, Paris: Maloine (1984)
- [2] V. Olariu, C. Brătianu, *Modelare numerică cu elemente finite*, Editura Tehnică, București (1986)
- [3] M.J. Forray, *Calculul variațional în știință și tehnică*, Editura Tehnică, București (1975)
- [4] E. Munro, *Image Processing and Computer-Aided Design in Electron Optics*, ed. by P.W. Hawkes, Academic Press, London - New York, 284-323 (1973)
- [5] I.J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. **4**, 45-99, 112-141 (1946)
- [6] J.C. Holladay, *A smoothest curve approximation*, Math. Tables Aids Comput. **11**, 233-243 (1957)
- [7] Gh. Micula, *Funcții spline și aplicații*, Editura Tehnică, București (1978)
- [8] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge (1986)
- [9] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer Verlag, New York (1978)
- [10] I.J. Schoenberg, *Privești matematice*, Centrul de Cercetări Matematice, Universitatea Winsconsin-Madison, Editura Tehnică, București (1989)
- [11] G.M. Phillips, P.J. Taylor, *Algorithms for spline and other approximations to functions and data*, Comput. Phys. Commun. **73**, 1-21 (1992)
- [12] A.K. Chaniotis et al, *High order interpolation and differentiation using B-splines*, J. Comput. Phys. **197**, 253-274 (2004)

- [13] P. Davis, *B-splines and Geometric Design*, SIAM News, **29(5)**, (1996)
- [14] O. Zatsarinny, *BSR: B-spline atomic R-matrix codes*, Comput. Phys. Commun. **174(4)**, 273-356 (2006)
- [15] P. Yang, X. Qian, *A B-spline based approach to heterogeneous objects design and analysis*, Computer Aided Design **39(2)**, 95-111 (2007)
- [16] W. Schadow, *Bspllib Package*, [www.netlib.org](http://www.netlib.org) (2000)